Exponenciális és logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek

Exponenciális egyenletek

IV

1603. *a)* $x=4$; *b)* $x=3$; *c)* $x=3$; *d)* $x=0$; *e)* $x=2$; *f)* $x=2$; *g)* $x=\frac{4}{3}$; *h)* $x=-\frac{1}{4}$.

1604. *a)* $x=\frac{7}{10}$; *b)* $x=\frac{19}{36}$; *c)* $x=\pm\frac{3}{2}$; *d)* $x=\pm\frac{8}{3}$; *e)* $x=3$; *f)* $x=0$.

1605. *a)* $x_1=-3$, $x_2=2$; *b)* $x=\frac{2}{3}$; *c)* $x=-4$; *d)* $x=-6$; *e)* nincs megoldás; *f)* $x=30$.

1606. *a)* nincs megoldás; *b)* $x=3$; *c)* $x=\frac{10}{3}$; *d)* $x=\frac{11}{4}$; *e)* $x=0$; *f)* $x=0$; *g)* $x=-\frac{3}{2}$; *h)* $x=-4$.

1607. *a)* $x_1=-7$, $x_2=5$; *b)* $x_1=-2$, $x_2=-7$; *c)* $x=-\frac{4}{9}$; *d)* nincs megoldás $\left(x=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$; *e)* $x=-2$; *f)* nincs megoldás.

1608. *a)* $x=-\frac{13}{6}$; *b)* $x=-\frac{15}{2}$; *c)* $x=\frac{3}{2}$; *d)* nincs megoldás; *e)* $x=-\frac{1}{2}$; *f)* $x=1$.

1609. *a)* $x=\frac{11}{3}$; *b)* $x=5$; *c)* $x=-\frac{39}{2}$; *d)* $x=15$; *e)* $x=13$; *f)* $x=-\frac{3}{4}$.

1610. *a)* $x=\frac{23}{11}$; *b)* $x=-\frac{111}{53}$; *c)* $x=-\frac{41}{23}$; *d)* $x=-\frac{15}{6}$; *e)* $x=14$; *f)* $x=-\frac{1}{3}$.

1611. *a)* $x=\frac{1}{3}$; *b)* $x=-57$; *c)* $x=\frac{89}{5}$; *d)* $x_1=2$, $x_2=-3$; *e)* $x_1=2$, $x_2=-6$; *f)* $x_1=3$, $x_2=-7$.

1612. *a)* $x=1$; *b)* $x=1$; *c)* $x=2$; *d)* $x=0$.

1613. *a)* $x=\frac{1}{2}$; *b)* $x=5$; *c)* $x=0$.

1614. *a)* $x=2$; *b)* $x=6$; *c)* $x=\frac{5}{9}$.

1615. *a)* $x=3$; *b)* $x_1=2,\ x_2=-3$; *c)* $x_1=1,\ x_2=-4$.

1616. *a)* $x_1=0,\ x_2=2$; *b)* $x_1=0,\ x_2=1$; *c)* $x_1=1,\ x_2=\log_2\frac{9}{4}$.

IV

1617. *a)* nincs megoldás; *b)* $x=2$; *c)* $x=\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$; *d)* $x=0$.

1618. *a)* $x=\frac{1}{5}$; *b)* $x=0$; *c)* $x_1=2,\ x_2=-2$.

Exponenciális egyenletrendszerek

1619. *a)* $x=2,\ y=1$; *b)* $x=1,\ y=\log_2 28$.

1620. *a)* $x=-2,\ y=1$; *b)* $x=3,\ y=-1$; *c)* $x=\frac{1}{2},\ y=1$;
d) $x=3,\ y=-1$.

1621. *a)* $x=y=0$; *b)* $x=1,\ y=\frac{1}{2}$.

1622. *a)* $x=2,\ y=3$; *b)* $x_1=-2,\ y_1=4,\ x_2=\frac{3}{2},\ y_2=\frac{1}{2}$;
c) $x_1=y_1=1,\ x_2=4,\ y_2=-4$.

1623. *a)* $x=\frac{12}{7}$; *b)* $x=\frac{3}{5}$.

1624. *a)* $x=\frac{12}{13}$; *b)* $x=\frac{15}{8}$.

1625. *a)* $x=\frac{20}{7}$; *b)* $x=\frac{pqr}{rq+rp+pq}$.

Exponenciális egyenlőtlenségek

1626. *a)* $x>3,\quad x\ge 7,\quad x\le 2,\quad x<2$;
b) $x\le -1,\quad x>-2,\quad x>-2,\quad x\ge -2$;

1627. *a)* $x\le 1,\quad x>2,\quad x<2,\quad x>-2$;
b) $x>\frac{5}{2},\quad x\le -\frac{1}{4},\quad x\le \frac{1}{4},\quad x\le -\frac{4}{3}$;
c) $x<0,\quad x<\frac{2}{3},\quad x\ge -\frac{7}{2},\quad x\ge 2$;

1628. *a)* $x<-\frac{3}{2}$ vagy $x>\frac{3}{2}$, $x<-\frac{7}{2}$ vagy $x>\frac{7}{2}$, $x\le-\frac{3}{4}$ vagy $x\ge\frac{7}{4}$, $-2\le x\le 2$;

b) $x\le 0$, $x<1$, $x>-2$, $x>\frac{1}{5}$.

IV

1629. *a)* $x>5$, $-\frac{5}{3}\le x\le\frac{3}{2}$, $15\le x<16$;

b) $0<x<2$, $x<3$ vagy $x>5$, $x<2$.

Pihenő

1630. A számjegyek szorzata 0, összege 9, tehát az összeg a nagyobb.

1630.

■	[1] 2	[2] 1
[3] 0	■	2
[4] 1	2	1

1631. A keresztrejtvényben 9 db prímszám szerepel.

1631.

■	[1] 3	[2] 5	[3] 7
■	■	[4] 3	7
[5] 1	[6] 3	■	7
[7] 3	2	1	6

Logaritmikus egyenletek

1632. *a)* $x=2$, $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{8}$, $x=\pm 1$;

b) $x=0$, $x=-45$, $x=2$.

1633. *a)* $x=\frac{14}{9}$, $x=0$, $x=\pm 8$;

b) $x=0$, $x=\frac{51}{5}$, $x=\pm 5$.

1634. *a)* $x=2$; *b)* $x=18$; *c)* $x=\frac{7}{2}$; *d)* nincs megoldás.

1635. *a)* $x=-\frac{1}{5}$, *b)* $x_1=-5$, $x_2=7$; *c)* $x_1=1$, $x_2=5$; *d)* $x_1=2$, $x_2=3$.
1636. *a)* $x_1=2$, $x_2=7$; *b)* nincs megoldás.
1637. *a)* $x=4$; *b)* $x=-1$.
1638. *a)* $x=2$; *b)* $x=\frac{1}{3}$.
1639. $x=9$, $x=5$.
1640. *a)* $x=\frac{1}{32}$, $x=128$; *b)* $x=6$, $x=8$.
1641. *a)* $x=3$; *b)* $x=4$; *c)* $x=-1$.
1642. *a)* $x=2$; *b)* $x=8$.
1643. *a)* $x=14$; *b)* $x=1$.

Pihenő

1644. A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	[1] 3	
[2] 5	7	
[3] 2	5	6

1644.

Tehát a megoldandó egyenlet:
$\log_7 x + \log_{28} 28 = 2$, ahonnan $x=7$.

1645. A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	[1] 2	7
[2] 1	4	
[3] 3	5	2

1645.

A $\log_{24} x + \log_{24} 2 + \log_{24} 4 = 1$ egyenlet megoldása: $x=3$.

1646. *a)* $x=4$, $x=\frac{27}{2}$; *b)* $x=81$, $x=5$; *c)* $x=\frac{9}{5}$, $x=100$.
1647. *a)* $x=\frac{5}{2}$, $x=3$; *b)* $x=13$, $x=8$.
1648. *a)* $x_1=3$, $x_2=3+\sqrt{2}$; *b)* $x=\frac{5}{8}$.
1649. nincs megoldás.
1650. *a)* $x_1=3$, $x_2=5$; *b)* $x=18$; *c)* $x=9$.
1651. *a)* $x=10$; *b)* $x=2$.
1652. $x=-1$.

1653. *a)* $x = -17$; *b)* $x = 2\sqrt{2}$.
1654. $x = 2$.
1655. *a)* $x = \frac{5}{3}$; *b)* $x = 2$; *c)* $x = \frac{1}{10}$.
1656. *a)* $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$; *b)* $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.
1657. $x = \frac{13}{4}$.
1658. *a)* $x = \pm\frac{1}{10^4}$, $x_2 = \pm\sqrt{10^5}$; *b)* $x = 1$; *c)* $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{4}$;
d) $x_1 = 27$, $x_2 = \frac{1}{9}$.
1659. *a)* $x = \log_7 5$; *b)* $x = 2$; *c)* $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{3}{7}$.
1660. *a)* $x = -2$; *b)* nincs megoldás.
1661. *a)* Vezessük be a $\log_2^2 x - 3\log_2 x = a$ új ismeretlent; $x_1 = 16$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 4$, $x_4 = 2$; *b)* $x = 5$.
1662. *a)* $x = 3$; *b)* $x = 16$; *c)* Vezessük be a $\sqrt{\log_2 x \log_2 x} = a$ új ismeretlent; $x = 16$.

Pihenő

1663. A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

[1] 9	9	
3		[2] 1
[3] 1	2	5

1663.

Ezek szerint a $\log_{30}(x^2 + x - 60) = 1$ egyenletet kell megoldanunk. Az egyenlet megoldása: $x_1 = -10$, $x_2 = 9$.

1664. A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	[1] 9	[2] 6	[3] 1
[4] 9		[5] 1	5
[6] 6	[7] 1		1
[8] 1	2	4	8

1664.

1665. *a)* $x = 16,\ x = 27,\ x > 0$; *b)* $x = 5,\ x = \sqrt[3]{9} - 1$; *c)* $x = 16,\ x = 25$.

1666. *a)* $x = \frac{1}{2}$; *b)* $x = \frac{1}{\sqrt[5]{7^6}}$; *c)* $x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{9}$.

1667. *a)* $x = a^2$;

b) Írjuk át az összes tagot 2-es alapra, majd vezessük be a $\log_2 x = a$ új ismeretlent. Ekkor a

$$\frac{3}{a} - \frac{4}{1+a} = \frac{3}{2+a}$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = 1$; ezzel az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{8}};$$

c) A bal oldal második tényezőjét írjuk át 19-es alapra. $x = 5$.

1668. *a)* A bal oldal második tényezőjét írjuk át x alapra, majd alkalmazzuk a logaritmus megfelelő azonosságait. Kapjuk:

$$\sqrt{1 + \log_x 6} \cdot \frac{1}{\log_x 6} = \sqrt{2},\ \text{ahonnan}\ 2\log_x^2 6 - \log_x 6 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$x = 6$.

b) Térjünk át a bal oldalon minden tagban 5-ös alapra, majd vezessük be a $\log_5 x = a$ új ismeretlent. Kapjuk:

$$\frac{6}{a} + \frac{3}{2+a} + \frac{1}{1+a} = 0,\quad \text{ahonnan}\quad a_1 = -\frac{3}{2},\quad a_2 = -\frac{4}{5}.$$

Ezzel az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{125}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[5]{625}}$.

c) A bal oldal értéke 1. Így a következő egyenlethez jutunk:

$$\log_5^2 x + 2\log_5 x + 1 = 0,\quad \text{ahonnan}\quad x = \frac{1}{5}.$$

1669. *a)* Először írjuk át a jobb oldalt 2-es alapra, majd emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$\log_4^2 x = \log_2 x = \log_4 x^2 = 2\log_4 x,\quad \text{innen}\quad x = 16.$$

b) Járjunk el ugyanúgy, mint az előző feladatban. $x = a^4$.

c) Írjunk át a bal oldalon minden tagot x alapra, majd vezessük be az $\log_x a = y$ új ismeretlent:

$$y^2 + \frac{1}{y^2} + 2\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{3}{4} = 0.$$

IV

Ha most $y+\frac{1}{y}=b$, akkor $y^2+\frac{1}{y^2}=b^2-2$, tehát kapjuk: $4b^2+8b-5==0$, azaz

$$b=y+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \quad \text{vagy} \quad b=y+\frac{1}{y}=-\frac{5}{2}.$$

Első esetben nem kapunk megoldást, a második esetben $y_1=-\frac{1}{2}$, $y_2=-2$. Az eredeti egyenlet megoldásai: $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a^2}$.

1670. *a)* Írjunk minden tényezőt azonos (pl. 2-es) alapra. $x=8$.

b) A bal oldal első két tagjában 2-es alapra áttérve ezt kapjuk:

$$(1-5^{x-3})\cdot\log_2(x^2+2x-3)=0 \Rightarrow x_1=3, \quad x_2=\sqrt{5}-1.$$

c) Mindkét négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel. Bevezetve a $\log_2 x=a$ új ismeretlent, ezt kapjuk:

$$|a-1|+|a+1|=2, \text{ ahonnan } -1\le a\le 1, \text{ tehát } \frac{1}{2}\le x\le 2,\ x\ne 1.$$

1671. *a)* A négyzetgyök alatt teljes négyzet szerepel. Bevezetve a $\log_3 x=a$ új ismeretlent, ezt kapjuk:

$$|3a-1|=2a, \text{ ahonnan } a_1=1,\ a_2=\frac{1}{5}, \text{ tehát } x_1=3,\ x_2=\sqrt[5]{3}.$$

b) A bal oldal második tényezőjét írjuk át $|x-4|$-es alapra. $x=-2$.

c) Hasonlóan járjunk el, mint az előző feladatban. $x=10$.

1672. *a)* A bal oldal mindkét tagját írjuk át 2-es alapra. $x_1=-1$, $x_2=-4$.

b) Az első tag második tényezőjét írjuk át x alapra, majd vezessük be a $\log_x a=b$ új ismeretlent. Kapjuk: $24b^2-2b-1=0$. Innen $x=\frac{1}{a^6}$.

1673. *a)* Vegyük észre, hogy $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$. Így, ha

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x=a, \text{ akkor}$$

$$a-\frac{1}{a}=\sqrt{32}, \quad \text{ahonnan} \quad a_1=2\sqrt{2}-3,\ a_2=2\sqrt{2}+3.$$

A negatív gyök nem lehetséges, így $x=2$.

b) Mivel $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$, ezért az egyenlet $a+\frac{1}{a}=4$ alakban írható. Innen

$$a_1=2+\sqrt{3},\ a_2=2-\sqrt{3}, \text{ tehát } x_1=2,\ x_2=-2.$$

1674. *a)* A bal oldal minden tagjában térjünk át 10-es alapra. Ezzel egyenletünk így írható:

$$\lg\frac{3^{\frac{x}{2}}\cdot\left(2^x+3^{\frac{x}{2}}\right)}{21}=\frac{x-2}{\log_4 2+\log_4 5},\quad \text{azaz}\quad \lg\frac{3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^x+3^x}{21}=\lg 4^{x-2}.$$

Innen $16\cdot 3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^x+16\cdot 3^x=21\cdot 2^{2x}$. Mindkét oldalt $3^{\frac{x}{2}}\cdot 2^x$-nel elosztva $16b^2+16b-21=0$ alakú egyenlethez jutunk. Innen $b_1=-\frac{7}{4}$, $b_2=\frac{3}{4}$. A negatív gyök nem jöhet számításba, így kapjuk: $x=2$.

b) $x_1=1,\ x_2=100$.

1675. A jobb oldali négyzetgyök alatt $-(3\cdot 3^y-1)^2$ szerepel, így az egyenletnek csak akkor van értelme, ha $y=-1$. Ezt az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $x=1$ adódik.

Logaritmikus egyenlőtlenségek

1676. *a)* $0<x<2,\ x>\sqrt{3},\ 0<x\le\frac{1}{5}$; *b)* $2<x<3,\ x>-2,\ x\ge\frac{5}{2}$.

1677. *a)* $4,5<x<5,\ x>\frac{11}{4},\ x\ge\frac{3}{2}$;

b) $4<|x|<\sqrt{17},\ |x|>\sqrt{3},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\le x<0$ vagy $1<x\le\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1678. *a)* nincs megoldás, $x<\frac{-1-5\sqrt{5}}{2}$ vagy $x>\frac{-1+5\sqrt{5}}{2}$, $1<|x|<2$;

b) $\frac{1}{2}<x,\ x\ne 1,\quad x>3,\quad \frac{1}{2}<x<1$.

1679. *a)* nincs megoldás, $x<5-\sqrt{26},\ -3<x<-2$ vagy $\frac{3}{2}\le x<6$;

b) $3<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2},\quad x>5$.

1680. *a)* $\frac{1}{3}\le x<1$ vagy $x\ge 3,\quad x>\frac{19}{7}$; *b)* $\frac{1}{3}<x<1,\quad x<-2$.

1681. *a)* $1\le x<2$ vagy $x\ge 4,\quad -2<x<5-\sqrt{29}$ vagy $x>5+\sqrt{29}$;

b) $-1+\sqrt{3}<x<2$;

c) $-1<\log_2(x-4)<1$, ahonnan $4,5<x<6$.

IV

1682. *a)* $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \geq 2$ vagy $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) \leq -2$, ahonnan
$-2 < x \leq -\frac{17}{9}$ vagy $x \geq 7$; *b)* $-2 \leq x < -1$ vagy $4 < x \leq 6$.

1683. *a)* $3 \leq x \leq 4{,}5$; *b)* $\frac{1}{2} < |x| \leq \frac{4}{5}$.

1684. *a)* Először a jobb oldalt írjuk át 2-es alapra, ezt kapjuk:

$$\log_4 x \leq \sqrt{\log_2 x} = \sqrt{2\log_4 x}, \quad \Rightarrow \quad \log_4^2 x \leq 2\log_4 x.$$

Mivel $\log_4 x > 0$, így $1 < x \leq 16$.

b) Az értelmezési tartomány ($x < -2$ vagy $x > 4$) miatt a logaritmus alapja minden szóba jöhető x-re kisebb, mint 1. Az egyenlőtlenség megoldása:
$1 - \sqrt{10} \leq x < -2$ vagy $4 < x \leq 1 + \sqrt{10}$.

1685. *a)* $x < 1$ vagy $x > \frac{3}{2}$; *b)* $2 < x \leq \frac{65}{32}$.

1686. Először hozzuk az egyenlőtlenséget az alábbi alakra:

$$\left(1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\right)(x - \sqrt{x}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Exponenciális és logaritmikus egyenletrendszerek

1687. *a)* $x = 1$, $y = 2$; *b)* $x = 1$, $y = 0$.
1688. *a)* $x = 1$, $y = 2$; *b)* $x = 100$, $y = 10$.
1689. *a)* $x = 10$, $y = \frac{1}{10}$; *c)* nincs megoldás.
1690. *a)* $x = 1$, $y = 8$; *b)* $x = 7$, $y = 3$.
1691. *a)* $x = 13$, $y = 11$; *b)* $x = 5$, $y = 1$.
1692. *a)* $x = 2$, $y = 6$; *b)* $x = 4$, $y = 9$;
c) térjünk át mindkét egyenletben a bal oldalon 2-es alapú logaritmusra:
$x = 64$, $y = 8$.

1693. *a)* A második egyenletből $x = \frac{1}{y^2}$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk:
$x = 4$, $y = \frac{1}{2}$.

b) Az első egyenletből – a logaritmus definícióját felhasználva: $\frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{4}$, ahonnan $x = \frac{11}{3}y$. Ezt felhasználva a második egyenletben, azt kapjuk, hogy: $x = 11$, $y = 3$.

c) Az első egyenletből: $x^2+\sqrt{x^2-y+3}=y+9$, amit így is írhatunk: $x^2-y+3+\sqrt{x^2-y+3}=12$. Bevezetve a $\sqrt{x^2-y+3}=a\geq 0$ új ismeretlent, azt kapjuk, hogy: $x^2-y-6=0$. Ezt és a második egyenletet felhasználva: $x=4$, $y=10$.

1694. *a)* A második egyenletből: $xy-x^2=x^2-y^2$, azaz $(x-y)(2x+y)=0$. Mivel x és y pozitív, ezért csak $x=y$ lehetséges. Ezt az első egyenletbe helyettesítve, kapjuk: $x=y=\sqrt[3]{49}$.

IV

b) Az első egyenletből $x=2y$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve:

$$x_1=-2,\ y_1=-1,\quad x_2=\frac{5}{4},\ y_2=\frac{5}{8}.$$

c) Mivel $\log_2^2 x^2=(2\log_2 x)^2=4\log_2^2 x$, ezért az első egyenlet bal oldala így írható:

$$4\log_2^2 x-4\log_3 y+32-\sqrt{\log_2^2 x-\log_3 y+8}=60.$$

Most vezessük be a $\sqrt{\log_2^2 x-\log_3 y+8}=a\geq 0$ új ismeretlent, akkor $4a^2-a-60=0$, innen pedig $\log_2^2 x-\log_3 y-8=0$. A második egyenletben vegyük mindkét oldal 3-as alapú logaritmusát: $\log_2 x=3\log_3 y$. Ezt felhasználva: $x_1=8$, $y_1=3$, $x_2=2^{-\frac{8}{3}}$, $y_2=3^{-\frac{8}{9}}$.

1695. *a)* Az első egyenletből: $x=3y$. Ezt a második egyenletben felhasználva: $x=1503$, $y=501$.

b) Az első egyenletből: $x+2=(x+y)^2-y$, azaz $(x+y)^2-(x+y)-2=0$. Ebből az $x+y$-ban másodfokú egyenletből: $x+y=2$. Ezt felhasználva a második egyenletben: $x=3$, $y=-1$.

Pihenő

1696. Vízsz. 1.: $256+25=281$. Függ. 2.: $x_1=18$, $x_2=4$.
A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

[1] 2	8	[2] 1
8		8
	[3] 1	4

1696.

A megoldandó egyenlet: $\log_{32}(2x-6)=\frac{1}{5}$.

$x=4$.

1697. Vízsz. 3.: $2\cdot\frac{8!}{5!}=672$. Függ. 1.: 16. Függ. 2.: 12, 5.
A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

^{1}1		^{2}1
^{3}6	^{4}7	2
	^{5}1	5

1697.

A számjegyek szorzata: $2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. A legkisebb szám, amellyel ezt meg kell szoroznunk, hogy négyzetszámot kapjunk: $3\cdot 5\cdot 7=105$.

1698. Vízsz. 1.: 122. Függ. 2.: 2, 31.
A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

	^{1}1	^{2}2	^{3}2
^{4}6		^{5}3	2
^{6}4	4	1	

1698.

$$25^{\log_{125}8}=8^{\frac{2}{3}}=4.$$

1699. Vízsz. 1.: 3125. Vízsz. 9.: 5, 6, 7. Függ. 3.: $64\cdot 4+30=286$. Függ. 8.: 3, 5.
A helyesen kitöltött keresztrejtvény:

		^{1}3	^{2}1	^{3}2	^{4}5
^{5}6		^{6}3	4	8	1
^{7}5	^{8}3		^{9}5	6	7
^{10}4	5	5	4		1
3			^{11}3	^{12}5	1
^{13}2	6	4	3	9	

1699.

A számjegyek összege:
$114=2\cdot 3\cdot 19$.
Tehát a keresett szám:
$114\cdot 18-2(2+3+19)=2004$.

Nehezebb feladatok a témakörből

1700. $x>1$. A feltételek szerint

$$\frac{\log_p x+\log_p(\log_{p^2}x)}{2}=\log_{p^2}x \quad\Rightarrow\quad \log_p(x\cdot\log_{p^2}x)=\log_{p^2}x^2=\log_p x,$$

$\log_{p^2}x=1$, ahonnan $x=p^2$.

1701. A feltételekből

$$\log_x 3 = \frac{1}{a}, \quad \log_x 4 = \frac{1}{b}, \quad \log_x 167 = \frac{1}{c}.$$

E három egyenlőséget összeadva

$$\log_x 3 \cdot 4 \cdot 167 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc},$$

ahonnan $\log_{2004} x = \dfrac{abc}{bc + ac + ab}$.

1702. $a > 1$, $a \neq 2$. Ha $a > 2$, akkor a logaritmus alapja 1-nél nagyobb, tehát

$$x^2 + 3 \geq a - 1, \quad \text{azaz} \quad x^2 + 4 - a \geq 0.$$

Ez utóbbi akkor teljesül minden x-re, ha $4 - a \geq 0$, tehát $2 < a \leq 4$.
Ha $1 < a < 2$, akkor

$$x^2 + 3 \leq a - 1.$$

Ez azonban semmilyen a-ra nem teljesül minden x-re.

1703. $\sin x > 0$, $\sin x \neq 1$, $\cos x > 0$, $\cos x \neq 1$.

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{4}{\log_{\cos x} \sin x} = 4.$$

Bevezetve a $\log_{\cos x} \sin x = a$ új ismeretlent:

$$a^2 - 4a + 4 = 0, \quad \Rightarrow \quad a = \log_{\cos x} \sin x = 2, \text{ ahonnan } \cos^2 x = \sin x,$$

$$1 - \sin^2 x = \sin x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad \Rightarrow \quad x \approx 0,6662 + 2k\pi. \ (k \in \mathbf{Z}).$$

1704. A megadott egyenlőség így írható:

$$\frac{1}{2} \cdot \log_{13} a + \frac{1}{2} \cdot \log_{13} b + \frac{1}{2} \cdot \log_{13} c = 1, \quad \text{azaz} \quad \log_{13} abc = 2.$$

Tehát a téglatest térfogata: $V = 169$. Mivel a, b és c pozitív egészek és $a \neq 1$, ezért vagy $a = 13$, továbbá b és c egyike 1, a másik 13. Ekkor a felszín:

$$A = 2(13 + 13 + 169) = 390.$$

Így a keresett arány: $\dfrac{A}{V} = \dfrac{390}{169} = \dfrac{30}{13}$, vagy pedig $a = 169$, $b = c = 1$. Ez esetben a keresett arány $\dfrac{A}{V} = \dfrac{678}{169}$.

1705. Mivel $25^{\log_5\sqrt{2}} = 2$, ezért szükséges, hogy

$$\sin x > 0, \quad \sin x \neq 1, \quad \text{és} \quad \sin x > \frac{1}{2}.$$

Mindezekből $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ és $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Mivel a logaritmus alapja kisebb, mint 1, ezért azt kapjuk, hogy

$$2 + 2\log_2 \sin x \geq 1, \quad \text{ahonnan} \quad \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$,
$x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. $(k \in \mathbf{Z})$.

1706. Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha

$$\sin x > 0, \quad \operatorname{tg} x > 0 \quad \text{és} \quad \sin x + \frac{1}{\sin x} \neq 1.$$

Mivel egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, így az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. $(k \in \mathbf{Z})$.
Az egyenlőtlenség így alakul:

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} < \sin x + \frac{1}{\sin x}, \quad \text{ahonnan} \quad \cos^2 x + \cos x - 1 > 0.$$

Innen – a feltételeket figyelembe véve –: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \cos x < 1$, amiből

$$-51{,}82° + k \cdot 360° < x < 51{,}82° + k \cdot 360°.$$

1707. $\log_2^2 x = (\log_4 x^2)^2 = 4\log_4^2 x$. Ezért az eredeti egyenlet így írható:

$$4\log_4^2 x - 20\log_4 x + 29 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5\log_4 x + 9},$$

$$4\left(\log_4^2 x - 5\log_4 x + 9\right) - 7 = \frac{11}{\log_4^2 x - 5\log_4 x + 9}.$$

Most vezessük be a $\log_4^2 x - 5\log_4 x + 9 = a \neq 0$ új ismeretlent, azt kapjuk, hogy

$$4a^2 - 7a - 11 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad a_1 = \frac{11}{4}, \quad a_2 = -1.$$

Az $a = -1$ esetben a $\log_4 x$-re adódó másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív, míg a másik esetben azt kapjuk, hogy:

$$4\log_4^2 x - 20\log_4 x + 25 = (2\log_4 x - 5)^2 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad x = 32.$$

IV

1708. Az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:
a) $x^2 - 1 > 0$;
b) $-x^2 + 2x + 15 > 0$;
c) $-\log_3^2(x^2 - 1) + 3\log_3(x^2 - 1) + 4 \geq 0$.
Az *a)* esetben $|x| > 1$. A *b)* esetben a másodfokú alak zérushelyei: -3 és 5, tehát
$-3 < x < 5$. A *c)* esetben a $\log_3(x^2 - 1)$-ben másodfokú alak zérushelyei: -1, és 4, tehát

$$\log_3 \frac{1}{3} \leq \log_3(x^2 - 1) \leq \log_3 81, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq |x| \leq \sqrt{82}.$$

Az összes feltételt figyelembe véve az eredeti kifejezés értelmezési tartománya:

$$-3 < x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \leq x < 5.$$

1709. $x > 0$. Mindkét esetben a $4y^2 - 37y + 9 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Mivel a másodfokú kifejezés zérushelyei: $\frac{1}{4}$ és 9, ezért
a) esetben

$$\log_2 x \leq \frac{1}{4} \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \geq 9, \quad \text{ahonnan}$$

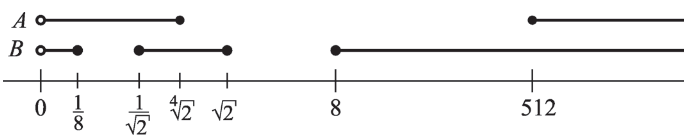
$$0 < x \leq \sqrt[4]{2} \quad \text{vagy} \quad x \geq 512.$$

A *b)* esetben $\log_2^2 x \leq \frac{1}{4}$ vagy $\log_2^2 x \geq 9$, azaz

$$-\frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \leq -3, \quad \text{vagy} \quad \log_2 x \geq 3, \text{ ahonnan}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \sqrt{2}, \quad \text{vagy} \quad 0 < x \leq \frac{1}{8}, \quad \text{vagy} \quad x \geq 8.$$

Ábrázoljuk mindkét halmazt egy számegyenesen:



1709.

A $B-A$ halmaz elemei: $\sqrt[4]{2} < x \leq \sqrt{2}$ vagy $8 \leq x < 512$.

1710. Az egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x > 1$. A négyzetgyök alatti kifejezés: $(3\log_3 x - 1)^2$, tehát a megoldandó egyenlőtlenségláncolat: $\log_3 x \leq |3\log_3 x - 1| \leq 2\log_3 x$.

Ha $\log_3 x \geq \dfrac{1}{3}$, akkor

$\log_3 x \leq 3\log_3 x - 1 \leq 2\log_3 x$,

ahonnan $\dfrac{1}{2} \leq \log_3 x \leq 1$, tehát ez esetben $\sqrt{3} \leq x \leq 3$.

Ha $0 < \log_3 x < \dfrac{1}{3}$, akkor

$\log_3 x \leq -3\log_3 x + 1 \leq 2\log_3 x$,

ahonnan $\dfrac{1}{5} \leq \log_3 x \leq \dfrac{1}{4}$, tehát ekkor $\sqrt[5]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$.

Az eredeti egyenlőtlenség megoldása:

$\sqrt{3} \leq x \leq 3$ vagy $\sqrt[5]{3} \leq x \leq \sqrt[4]{3}$.

1711. Az *a)* kifejezés hatványkitevőjében szereplő másodfokú kifejezésnek $x = 3$-ban van maximuma, így

$0 < \log_2(-x^2 + 6x + 55) = \log_2 64 = 6.$

Tehát

$\log_{\sqrt{6}} \log_2(-x^2 + 6x + 55) \leq \log_{\sqrt{6}} 6 = 2,$

vagyis

$5^{\log_{\sqrt{6}} \log_6(-x^2 + 6x + 55)} \leq 5^2 = 25.$

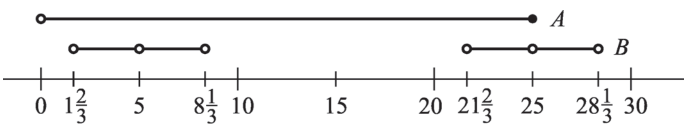
Az A halmaz elemei: $0 < a \leq 25$.

A *b)* esetben

$$2\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) > 1 \quad \text{és} \quad 2\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \neq 2,$$

ahonnan a B halmaz elemei: $1\dfrac{2}{3} + 20k < x < 8\dfrac{1}{3} + 20k$ és $x \neq 5 + 20k$.

Ábrázoljuk egy számegyenesen a kapott eredményeket:



1711.

Az $A-B$ halmaz y elemei:

$0 < y \leq 1\dfrac{2}{3}$, $\quad y = 5$, $\quad 8\dfrac{1}{3} \leq y \leq 21\dfrac{2}{3}$, $\quad y = 25$.

1712. Az egyenlőtlenség minden tagja így alakítható:

$\log_x xyz^9 = 1 + \log_x y + 9\log_x z$, tehát

$\log_x y + \log_y z + \log_z x + 9\log_x z + 9\log_y x + 9\log_z y > 18.$

De

$$\log_x y + 9\log_y x = 3\left(\frac{\log_x y}{3} + \frac{3}{\log_x y}\right) \geq 3\cdot 2 = 6.$$

Így már csak azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\log_x y}{3} = \frac{\log_y z}{3} = \frac{\log_z x}{3} = 1$$

nem lehetséges. Ugyanis ellenkező esetben arra jutnánk, hogy $x = y = z = 0$ vagy $x = y = z = 1$, ami nyilván lehetetlen.

1713. $x \neq 0$. Térjünk át a bal oldalon a alapra; azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\log_a a^2}{\log_a \frac{1}{a^x}} + \frac{\log_a a^x}{\log_a a^2} > x + \frac{a^2+1}{a}, \quad \text{vagyis} \quad -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} > x + \frac{a^2+1}{a}.$$

Innen, ha $x > 0$, akkor

$ax^2 + 2x(a^2+1) + 4a < 0.$

E másodfokú kifejezés zérushelyei: $-2a$ és $-\frac{2}{a}$. Mivel a feltételek szerint $a > 1$, ezért ebben az esetben nem kapunk megoldást.

Ha $x < 0$, akkor $x < -2a$ vagy $x > -\frac{2}{a}$.

Tehát az eredeti egyenlőtlenség megoldása:

$$x < -2a \quad \text{vagy} \quad -\frac{2}{a} < x < 0.$$

1714. Legyen $\log_2 7 = a$ és vizsgáljuk a

$$12 < a^2 + \frac{36}{a^2} < 13$$

egyenlőtlenségláncolatot.

Egyik irányban $a^4 - 12a^2 + 36 > 0$, azaz $(a^2-6)^2 > 0$. Ez utóbbi minden a-ra teljesül, csak azt kell megmutatnunk, hogy $\log_2^2 7 \neq 6$, azaz $2^{\sqrt{6}} \neq 7$. Ez azonban igaz, hiszen

$$2^{\sqrt{6}} < 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} < 7.$$

Másik irányban

$a^4 - 13a^2 + 36 < 0$, ahonnan $4 < a^2 < 9$, vagyis $2 < a < 3$.

Mivel $2 < \log_2 7 < 3$, ezért ez az egyenlőtlenség is igaz.

1715. A megadott egyenes az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$, az y tengelyt, ahol $x = 0$. E metszéspontok:

IV

$$x = \frac{9}{\log_3 a}, \quad y = \frac{9}{\log_3 a^{-2}}.$$

Az egyenes és a tengelyek alkotta háromszög területe:

$$\left|\frac{9}{\log_3 a}\right| \cdot \left|\frac{9}{\log_3 a^{-2}}\right| \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{16}, \quad \text{ahonnan} \quad \log_3 a = \pm 2,$$

tehát

$$a = 9 \quad \text{vagy} \quad a = \frac{1}{9}.$$

Első esetben az egyenes egyenlete: $2x - 4y = 9$, a tengelymetszetek: $x = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{9}{4}$.

A másik esetben az egyenes egyenlete: $-2x + 4y = 9$, a tengelymetszetek: $x = -\frac{9}{2}$, $y = \frac{9}{4}$. Tehát két egybevágó derékszögű háromszögről van szó. Ezek átfogója:

$$\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{5}.$$

A háromszög K kerülete: $K = \frac{9}{4} \cdot \left(3 + \sqrt{5}\right)$.

1716. Vizsgáljuk az egyenlet két oldalának lehetséges értékeit. A jobb oldal:

$$-y^2 + 6y - 5 = -(y-3)^2 + 4,$$

tehát a jobb oldal értéke legfeljebb 4, és pontosan akkor 4, ha $y = 3$.

A bal oldalon:

$$\frac{2\sin^2 x(1 + \operatorname{ctg}^2 x)}{\sin 2x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

E tört értéke legalább 2, és pontosan akkor 2, ha $\sin 2x = 1$. Ezek szerint a bal oldal értéke legalább $\log_{\sqrt[4]{2}} 2 = 4$. Ezek szerint az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha

$$y = 3 \quad \text{és} \quad \sin 2x = 1, \quad \text{ahonnan} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi. \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

1717. Az egyenlet bal oldala:

$$2+3\log_x y+2+3\log_y x=4+3\cdot\left(\log_x y+\frac{1}{\log_x y}\right)\geq 10.$$

A jobb oldal:

$$\log_{5\sqrt{2}}\left[-(z-4)^2+4\right]\leq 10.$$

Tehát az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\log_x y=1$, azaz $x=y$, és $z=4$. Ezzel a második egyenlet: $5x^2=2005$, vagyis $x=y=\sqrt{401}$.

1718. Az egyenlet bal oldalán szereplő logaritmusok alapjai egymásnak reciprokai, továbbá a négyzetgyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek. Így az első tag:

$$\log_{3-2\sqrt{2}}\frac{1}{|x-3|}=\log_{3+2\sqrt{2}}|x-3|.$$

Vezessük be a $\log_{3+2\sqrt{2}}|x-3|=a$ új ismeretlent, ekkor azt kapjuk, hogy

$$a+\frac{1}{a}=\frac{5}{2},\quad \text{ahonnan}\quad a_1=2,\quad a_2=\frac{1}{2}.$$

Ha $\log_{3+2\sqrt{2}}|x-3|=2$, akkor

$$x-3=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2},\quad \text{vagy}$$

$$x-3=-\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=-17-12\sqrt{2},$$

ha $\log_{3+2\sqrt{2}}|x-3|=\dfrac{1}{2}$, akkor

$$x-3=\sqrt{3+2\sqrt{2}},\quad \text{vagy}\quad x-3=-\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

Tehát az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1=20+12\sqrt{2},\quad x_2=-14-12\sqrt{2},\quad x_3=3+\sqrt{3+2\sqrt{2}},$$

$$x_4=3-\sqrt{3+2\sqrt{2}}.$$

1719. Az első egyenlet bal oldala így alakítható:

$$\log_x x^n+\log_x y^k+\log_y y^n+\log_y x^k=2n+k\left(\log_x y+\log_y x\right)=4\sqrt{nk}.$$

A bal oldal legalább $2(n+k)$. A jobb oldal viszont – a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt – legfeljebb $2(n+k)$. Így egyenlőség csak akkor lehet a két oldal között, ha

$$\log_x y+\log_y x=2,\quad \text{azaz}\quad \log_x y=1,\quad \text{ahonnan}\quad x=y.$$

De $x^{\log_{x^2} z} = \sqrt{z}$, így a második egyenletből:

$\sqrt{z} + \sqrt{z} + 1 + z - 2\sqrt{z} = 2005,$ ahonnan $z = 2004.$

Tehát az egyenletrendszert kielégítő számhármasok: $z = 2004$, $x = y > 1$ tetszőleges.

IV

Vegyes és gyakorlati feladatok

1720.

3	15	11	495
17	1	5	85
9	13	7	819
X	195	385	

1720. Érdemes először a 7-tel, 11-gyel, 13-mal és 7-tel való oszthatóságot vizsgálni. Ez után már könnyen kitölthető a négyzetháló. $X = 459$.

1721.

11	7	2	20
3	5	17	25
19	13	23	55
33	25	42	

1721. Induljunk ki abból, hogy az első sor, illetve a harmadik oszlop összege páros.

1722. $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = 1458$, $\frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 1089$, $\frac{1}{C} + \frac{1}{D} = 1629$. Az első egyenlőségből kivonva a másodikat, majd a különbséghez hozzáadva a harmadikat, ezt kapjuk: $\frac{1}{A} + \frac{1}{D} = 1458 - 1089 + 1629 = 1998$.

Tehát kiskutyánk 2004-ben éppen 6 éves.

1723. $\sqrt{xy} = 1046$, $\sqrt{yz} = 1569$, $\sqrt{zq} = 2997$. Osszuk el az első és a harmadik szorzatát a másodikkal: $\frac{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{zq}}{\sqrt{yz}} = \sqrt{xq} = \frac{1046 \cdot 2997}{1569} = 1998$. Tehát a kiscica 2004-ben éppen 6 éves lesz.

1724. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=1526$, $\dfrac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}=1402$, $\dfrac{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{2}=1867$. Az első és a harmadik összegéből vonjuk ki a másodikat:

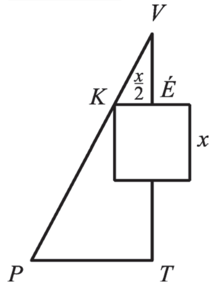
$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}{2}-\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{d}}{2}=1526+1867-1402=1991.$$

IV

Tehát az unoka 2009-ben lesz nagykorú.

1725. Ha egy egész számhoz egyet hozzáadva a számjegyeinek összege csökken, akkor ez a szám 9-re végződik. Ha az utolsó előtti számjegy (tízesek) nem 9, akkor a számjegyek összege 9-cel csökken és 1-gyel növekszik, tehát összesen 8-cal csökken. A gondolatsort folytatva arra jutunk, hogy egy számhoz 1-et hozzáadva, a számjegyeinek összege csak $9k+8$ alakú számmal csökkenhet. Tehát csak az *e*) állítás lehet igaz.

1726.



1726. Az ábra alapján: a *VÉK* és *VTP* háromszögek hasonlók, így

$$\frac{4}{\frac{x}{2}}=\frac{8+x}{10,5},\text{ ahonnan } x=6.$$

Tehát a város lakóinak a száma: $36\cdot 860=30\,960$ fő.

1727. A kötvények összértéke 5500 dollár. Olyat kell elvenni belőle, hogy a megmaradók 4-gyel is, és 3-mal is, azaz 12-vel oszthatók legyenek. Ez csak a 700 dollár értékű kötvényre teljesül, tehát ez lesz az asszonyé.

1728. Ha a bolygók száma n, akkor $150<n(n-1)<160$. Innen $n=13$.

1729. Az összes könyvek száma 68. Ha valamelyik gyerek hiányzott, akkor az elvitt könyvek száma: rendre 63, 59, 53, 44, vagy 55. Ezek között két olyan található, melynek van 10 és 20 közé eső osztója: $44=4\cdot 11$ vagy $55=5\cdot 11$. Tehát az árvaháznak 11 lakója van.

1730. A feltételekből következik, hogy a négyzetekben szereplő számok összege 10. Tehát elég sok 0-nak kell lennie közöttük. Rövid próbálkozás után kapjuk az egyetlen eredményt:

1730.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.
2	1	0	0	0	1	0	0	0	6

1731. $\overline{19ab}+1^2+9^2+a^2+b^2=1999$, azaz $10a+b+a^2+b^2=17$.
Innen csak $a=0$ vagy $a=1$ lehetséges. Ha $a=0$, akkor $b+b^2=b(1+b)=17$. De 17 nem bontható fel két szomszédos egész szorzatára, tehát ekkor nincs megoldás. Ha $a=1$, akkor $b(1+b)=6$, ahonnan $b=2$. Tehát az illető születési éve: 1912.

1732. Ha $t=\dfrac{S}{20}$ és $t-1=\dfrac{S}{30}$, akkor $S=60$. Ezzel

$t-\dfrac{1}{2}=\dfrac{S}{x}$, azaz $\dfrac{S}{20}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{S}{x}$, vagyis $3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{60}{x}$, ahonnan $x=24$.

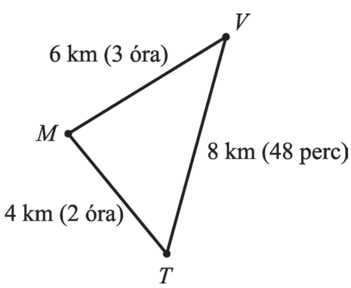
Tehát a biciklistának 24 km/h sebességgel kell haladnia.

IV

1733. A sárkány legyőzésének egy lehetséges módját mutatja az alábbi táblázat:

Vágunk	Megmaradó fejek	Megmaradó farkak
1 farkat	5	8
2 fejet	3	8
2 fejet	1	8
2 farkat	2	6
2 farkat	3	4
2 farkat	4	2
1 farkat	4	3
1 farkat	4	4
2 farkat	5	2
2 farkat	6	0
2 fejet	4	0
2 fejet	2	0
2 fejet	0	0

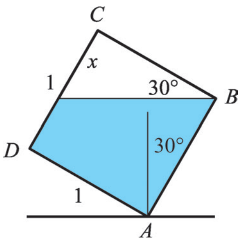
1734.



1734. A sematikus ábra alapján:
Ha valamely egész óra után 48 perccel indul, akkor mindegy melyik utat választja. Ha egész óra és 48 perc után indul, akkor az **M–T–V** utat kell választani, ha egész óra és 48 perc előtt indul, akkor az **M–V** utat kell választani.

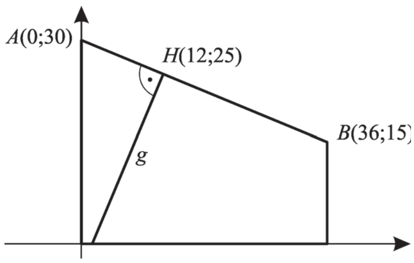
1735. Az öt gyerek összes kártyáinak a száma 148. A kupacban levő kártyák számának 5-tel oszthatónak kell lennie, vagyis a 148-ból olyan számot kell elvenni, hogy a megmaradók száma vagy 5-re vagy 0-ra végződjön. Ez csak Béla vagy Elemér kártyáinak számára teljesül, tehát csak Béla hiányozhatott.

1736/a.



1736. Tekintsük az ábrákat:
Az *a)* ábra alapján a kocka üres részének térfogata

1737.



$\dfrac{\text{tg } 30°}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, így a víz térfogata:

$1 - \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$.

A *b)* ábra alapján

A megmaradó víz térfogata: $\dfrac{y}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\,\text{tg}\,\alpha}$, ahonnan $\alpha \approx 54{,}57°$.

1737. Helyezzük el az *ábrát* egy koordináta-rendszerben!
Az A, B és H pontokból a g gerenda egyenesének egyenlete: $-12x+5y=-19$.
Ez az egyenes az x tengelyt a $\left(\dfrac{19}{12};\, 0\right)$ pontban metszi. Ezzel a gerenda hossza: $g \approx 27{,}08$ m.

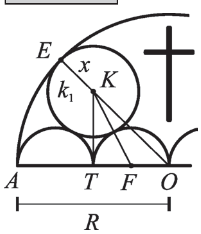
1738. Ha S az út, v a szokásos menetidő, akkor

$$\frac{\dfrac{Sp}{100}}{v\left(1-\dfrac{p}{100}\right)} + \frac{S-\dfrac{Sp}{100}}{v\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{S}{v}.$$

Innen $\dfrac{S}{v}$-vel egyszerűsítve és a megfelelő átalakításokat elvégezve a

$\dfrac{p}{100-p} + \dfrac{100-p}{100+2p} = \dfrac{5}{6}$, ahonnan $7p^2 - 275p + 2500 = 0$;
$p_1 = 25\%$, $p_2 \approx 14{,}29\%$.

1739.



1739. Az ábra alapján

$OK = R - x$, $OT = \dfrac{R}{2}$, $FK = \dfrac{R}{4} + x$, $FT = \dfrac{R}{4}$.
$KT^2 = OK^2 - OT^2 = FK^2 - FT^2$, azaz

$(R-x)^2 - \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{R}{4}+x\right)^2 - \left(\dfrac{R}{4}\right)^2$, ahonnan $x = \dfrac{3}{10}R$.

IV

1740. Legyen P_T Tom, P_J pedig Jerry pihenőideje és F_T Tom, F_J Jerry futóideje! Ekkor a feltételek szerint

$$P_T + F_T = P_J + F_J,\ P_T = \frac{1}{3}F_J \text{ és } P_J = \frac{1}{4}F_T.$$

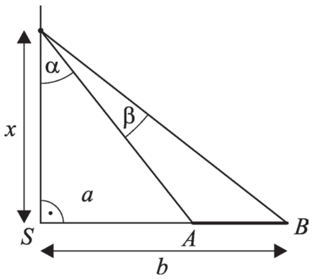
Ezek szerint

$$\frac{1}{3}F_J + F_T = \frac{1}{4}F_T + F_J, \text{ ahonnan } F_J = \frac{9}{8}F_T.$$

Ha x Jerry sebessége, akkor

$$99 \cdot F_T = x \cdot F_J, \text{ vagyis } x = \frac{8 \cdot 99}{9} = 88 \text{ egység.}$$

1741.



1741. Legyen AB a gólvonal, S a szögletzászló, P a keresett pont, melyből az AB gólvonal a legnagyobb szögben látszik, és legyen β a keresett legnagyobb szög.
A megfelelő derékszögű háromszögekből:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{x},\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{b}{x}.$$

Innen – felhasználva $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ kifejtését –:

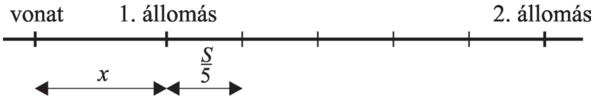
$$\frac{\frac{a}{x} + \operatorname{tg}\beta}{1 - \frac{a}{x}\operatorname{tg}\beta} = \frac{b}{x}, \text{ ahonnan } \operatorname{tg}\beta = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Mivel β hegyesszög, ezért akkor maximális, ha $\operatorname{tg}\beta$ a legnagyobb, azaz a reciproka a legkisebb. De a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt

$$\frac{\frac{x^2}{x(b-a)} + \frac{ab}{x(b-a)}}{2} \geq \sqrt{\frac{ab}{(b-a)^2}}.$$

Egyenlőség akkor, és csak akkor, ha $\frac{x^2}{x(b-a)} = \frac{ab}{x(b-a)}$, ahonnan $x = \sqrt{ab}$.

1742. Legyen v Pisti sebessége, x pedig a vonat és az 1. állomás közötti távolság.



1742.

A feltételek szerint

$\frac{S}{5v} = \frac{x}{40}$, azaz $x = \frac{40S}{5v} = \frac{8S}{v}$,

továbbá $\frac{4}{5} \cdot \frac{S}{v} = \frac{S+x}{40}$.

A kapott eredményeket egybevetve ezt kapjuk: $v = \frac{120}{5} = 24$ km/h.

1743. A $3 \cdot \overline{abc} + 49 = \overline{cba}$ egyenletet részletesen kiírva:

$3 \cdot (100a + 10b + c) + 49 = 100c + 10b + a,$
$299a + 20b + 49 = 97c.$

Innen csak $a = 2$ vagy $a = 1$ lehetséges.
Ha $a = 2$, akkor

$598 + 20b + 49 = 97c$, azaz $20b = 97c - 647.$

A most kapott egyenlet bal oldala osztható 10-zel, tehát a jobb oldalnak is 0-ra kell végződnie. De a jobb oldal csak akkor végződik 0-ra, ha $97c$ 7-re végződik, azaz, ha $c = 1$. Ez esetben viszont a jobb oldal negatív lenne, tehát ez esetben nem kapunk megoldást.
Ha $a = 1$, akkor

$299 + 20b + 49 = 97c$, azaz $20b = 97c - 348.$

Ennek az egyenletnek – ugyanúgy, mint előbb – a jobb oldalának 0-ra kell végződnie, azaz $97c$-nek 8-ra kell végződnie. Ez csak akkor teljesül, ha $c = 4$, és ekkor

$20b = 388 - 348 = 40$, ahonnan $b = 2.$

A keresett szám: $\overline{abc} = 124$. Valóban: $3 \cdot 124 + 49 = 421$.

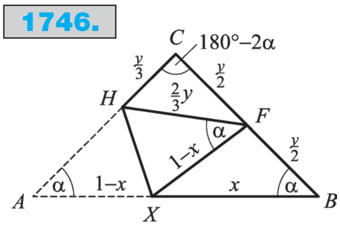
1744. A skatulyaelv alapján a 257 papagáj között van 65 azonos színű. Ezeket négy korcsoportba lehet osztani (hiszen nincs 5 különböző korú, azonos színű), tehát – ugyancsak a skatulyaelv szerint – kell lennie 17 azonos színű és azonos korú papagájnak. Ha ezeket két részre kell osztani, akkor valamelyik részben lesz legalább 9 azonos korú és azonos színű papagáj.

1745. A körfolyosó területe: $R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2)$. A kötél hosszának a felére: $11{,}25^2 = R^2 - r^2$. Tehát a körfolyosó területe: $11{,}25^2\pi = 397{,}6$ m². Így a szükséges dobozok száma:

$$\frac{397{,}6 \cdot 1{,}1}{1{,}6} = 273{,}3, \text{ vagyis } 274.$$

1746. $HC = \frac{y}{3}$ és $AH = HF = \frac{2}{3}y$. Írjuk fel a koszinusztételt az FCH háromszögre:

1746.



$$\left(\frac{2}{3}y\right)^2=\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2-2\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{2}\cdot\cos(180°-2\alpha).$$

$$\frac{4}{9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}(1-2\cos^2\alpha),$$

ahonnan $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

De $\cos\alpha=\dfrac{1}{2y}$, így $\dfrac{1}{2y}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$, azaz $\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$.

Írjuk fel újra a koszinusztételt, most az XBF háromszögre:

$$(1-x)^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)^2-2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\cdot\cos\alpha,$$

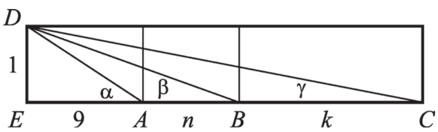
$1-2x=\dfrac{1}{10}-\dfrac{x}{2}$, ahonnan $x=\dfrac{3}{5}$.

Tehát a hajtás másik vége a háromszög AB oldalát $3:2$ arányban osztja: $\dfrac{BX}{XA}=\dfrac{3}{2}$.

1747. Tekintsük az ábrát.

Ha $\alpha=\beta+\gamma$, akkor az ABD és ACD háromszögek hasonlók, vagyis

1747.



$$\frac{n}{AD}=\frac{AD}{n+k},\text{ azaz } n(n+k)=82.$$

Innen $n=1$, $k=81$, vagy $n=2$, $k=39$.

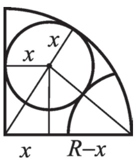
De $n=1$ nem lehetséges, így Béla és Csaba közül valamelyik a 12. fa tövében, a másik pedig az 51. fa tövében végezte a mérést.

1748. $90+\dfrac{90}{6}=105$ gerezd fokhagymát kell ültetni.

1749. A megfelelő derékszögű háromszögekből

$$(R-x)^2-x^2=\left(\frac{R}{2}+x\right)^2-(R-x)^2,\text{ ahonnan } x=\frac{7}{20}R.$$

1749.

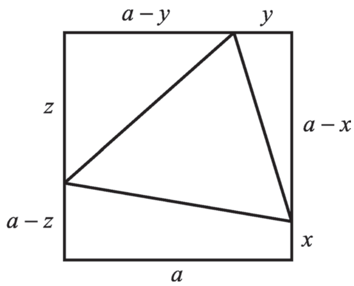


1750. Tekintsük az ábrát.
A háromszög területe:

$$T = a^2 - \left[\frac{y(a-x)}{2} + \frac{z(a-y)}{2} + \frac{a(a+x-z)}{2}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2} - \left(\frac{y(a-x)+z(a-y)}{2}\right).$$

1750.



Ez akkor a legnagyobb $\left(\frac{a^2}{2}\right)$, ha y vagy $a-x$ és z vagy $a-y$ egyenlő 0-val. Ez azt jelenti, hogy a háromszög területe akkor a legnagyobb, ha két csúcsa a négyzet két szomszédos csúcsába esik, a harmadik pedig a négyzet szemközti oldalának bármely pontja.

1751. A kúp alakú edény és a benne levő víz (kúp) hasonlók, így térfogatuk aránya a hasonlóság arányának a köbe, azaz

$$V_{\text{víz}} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}512\,\text{l}.$$

A henger alakú edényben levő vízoszlop térfogata egyenesen arányos a benne levő vízoszlop magasságával, tehát

$m_{\text{víz}} = 0{,}512\,\text{l} \cdot 30 = 15{,}363$ cm.

1752. A nyomdai ív két oldalát az alábbi ábra szemlélteti:

1752.

egyik oldal

8	9	16	1
25	24	17	32
28	21	20	29
5	12	13	4

másik oldal

2	15	10	7
31	18	23	26
30	19	22	27
3	14	11	6

1753. A feltételek szerint az L lány $L+6$ fiúval táncolt, és ez az összes fiúk száma. Ezek szerint $L+6=F$ és $L+F=42$. Innen $L=18$ és $F=24$.

1754. A bankkártya:

1754.

1	8	6	5	1	8	6	5	1	8	6	5	1	8

1755. Nem. Mindhárman $\frac{5}{3}$ üveg sört fogyasztottak, így András 3 üvegéből Csaba $\frac{4}{3}$ üveggel fogyasztott, míg Béla 2 üveg söréből $\frac{1}{3}$ üveggel. Ezek szerint az 5 eurót $4:1$ arányban kell elosztani András és Béla között.

1756. A négy repülőgép egy olyan szabályos tetraéder csúcsaiban van, melynek testmagassága 300 m. Az a oldalú szabályos tetraéder testmagassága $a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 300$, ahonnan az él (vagyis két repülőgép távolsága) $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 367{,}4$ m.

1757. A félgömb és a henger térfogatának egyenlőségéből, valamint a félgömb és a kúp térfogatának egyenlőségéből:

$$\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 = 4^2\cdot\pi\cdot m_{\text{henger}},\ \text{ahonnan}\ m_{\text{henger}} = \frac{8}{3}\ \text{cm};$$

$$\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 4^3 = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot m_{\text{kúp}},\ \text{ahonnan}\ m_{\text{kúp}} = 8\ \text{cm}.$$

1758. Ha l a lányok száma, $3l$ a fiúk száma, akkor a kérdéses alkalommal:

$(l-8)\cdot 5 = 3l - 8,$

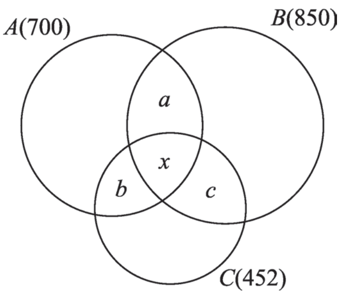
ahonnan $l = 16$ és $3l = 48$.

1759. Az alábbiakban mutatunk néhány megoldást:

$100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8\cdot 9;$
$100 = 1 + 2\cdot 3 + 4\cdot 5 - 6 + 7 + 8\cdot 9;$
$100 = -1\cdot 2 - 3 - 4 - 5 + 6\cdot 7 + 8\cdot 9;$
$100 = (1 + 2 - 3 - 4)\cdot(5 - 6 - 7 - 8 - 9).$

1760. A 6 literest megtöltjük, majd átöntjük a 7 literesbe. Ezután a 6 literest újra megtöltjük, és feltöltjük vele a 7 literest, ekkor a 6 literesben 5 liter marad. A 7 literest kiürítjük, majd az 5 litert beleöntjük a 6 literesből. Aztán a 6 literest újra megtöltjük, feltöltjük vele a 7 literest, így a 6 literesben 4 liter marad. Végül a 7 literest kiürítjük, áttöltjük a 6 literesben levő 4 litert, majd a 6 literest ismét megtöltjük, és 3 litert átöntünk a 7 literesbe, így a 6 literesben éppen 3 liter marad.

1761.



1761. Jelölje A halmaz a robotgéppel, B halmaz a mosógéppel, C halmaz a mosogatógéppel rendelkező családok számát.
A feltételek szerint
$a + x \geq 550$, $b + x \geq 152$, $c + x \geq 302$, ezért

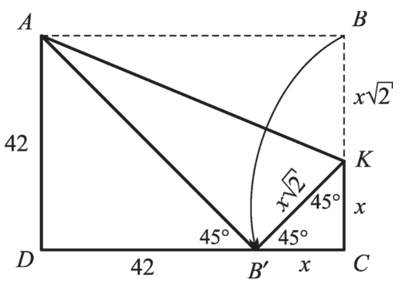
$a + b + c + 3x \geq 1004.$

De $a + b + c \leq 1000$, így $3x \geq 4$, azaz

$x \geq \frac{4}{3}$. Tehát 1-nél több megkérdezett család rendelkezik mindhárom háztartási eszközzel.

1762. Tekintsük az ábrát.

1762



A hajtogatás jellegéből következik, hogy $KB'C\sphericalangle = B'KC\sphericalangle = AB'D\sphericalangle = 45°$, és $BK = B'K$, valamint $B'A = BA$. Tehát az ADB' háromszög is egyenlő szárú, ezért a téglalap másik oldala $AB = 42\sqrt{2}$. Mivel

$x + x\sqrt{2} = 42$, ahonnan

$x = 42 \cdot (\sqrt{2} - 1)$,

ezért az összehajtott terítő területe:∢

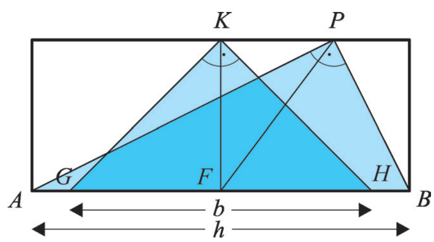
$$T = \frac{[42 + 42 \cdot (\sqrt{2} - 1)] \cdot 42\sqrt{2}}{2} = 42^2 = 1764 \text{ cm}^2.$$

1763. A piramis felülnézete egy 10×10 m-es négyzet, melynek területe 100 m^2, ami be van vonva arannyal. Ezenkívül még az öt db hasáb oldallapjai, melyek 4-esével egybevágó téglalapok. E téglalapok mindegyikének egyik oldala 1 m, a másik oldalak pedig rendre 4 m, 5,5 m, 7 m, 8,5 m és 10 m. Tehát az arannyal bevont terület:

$100 + 4 \cdot (4 + 5{,}5 + 7 + 8{,}5 + 10) = 240$ m^2.

1764. Az ábra jelöléseivel:

1764.

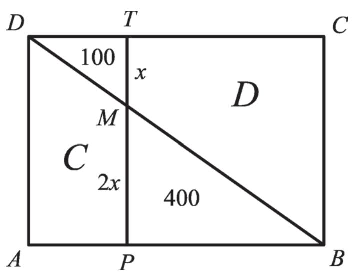


KGH egyenlő szárú derékszögű háromszög, így $KF = \frac{b}{2}$. Thalész tételéből: $PF = \frac{h}{2}$. Így a keresett PK távolság: $PK = \frac{\sqrt{h^2 - b^2}}{2}$.

1765. Gömb alakú hordó: 2. grafikon; körlapján álló kúp alakú hordó: 4. grafikon; csúcsán álló kúp alakú hordó: 1. grafikon, henger alakú hordó: 3. grafikon.

1766. A BMT és BMP háromszögek hasonlók; területeikből a hasonlóság aránya 1 : 2.

1766.



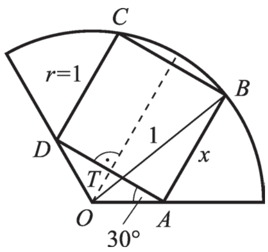
Az *APMD* és a *BCTM* trapézok területe

$$T_C = \frac{(3x+2x)\cdot y}{2} = \frac{5}{2}\cdot xy = 500,\ T_D = \frac{(3x+x)\cdot 2y}{2} = 4xy = 800.$$

(Ugyanezt a gondolatmenetet követve: ha a *DMT* háromszög területe t, a *BMP* háromszög területe T, akkor az egyes trapézok területe: $T_C = t + 2\sqrt{Tt}$, $T_D = T + 2\sqrt{Tt}$.)

1767. András és Béla széke között a távolság 68 − 33 = 35 szék. Ezek szerint, ha a legmagasabb sorszámú szék az x, akkor $17 + x - 92 = 35$, ahonnan $x = 110$.

1768.



1768. A körcikk területe: $T_{\text{körcikk}} = \frac{1^2\cdot\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Mivel $TAO\sphericalangle = 30°$, tehát $BAO\sphericalangle = 120°$, így $OB^2 = x^2 + AO^2 - 2x\cdot AO\cdot\cos 120°$.

De $\cos 30° = \frac{\frac{x}{2}}{AO}$, tehát $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2AO}$, ahonnan $AO = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Azt kapjuk, hogy $1 = x^2 + \frac{x^2}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$,

ahonnan $x^2 = \frac{3}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}$.

Ezzel

$$\frac{T_{\text{négyzet}}}{T_{\text{körcikk}}} = \frac{\frac{3\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}}{\frac{\pi}{3}} = \frac{3\left(4-\sqrt{3}\right)}{13}\cdot\frac{3}{\pi} = \frac{9\left(4-\sqrt{3}\right)}{13\pi} \approx 0{,}500\,05.$$

$\pi = 3{,}14$-gyel számolva tehát a négyzet területe nagyobb, mint a körcikk területének a fele, vagyis az építési engedélyt nem adják meg.

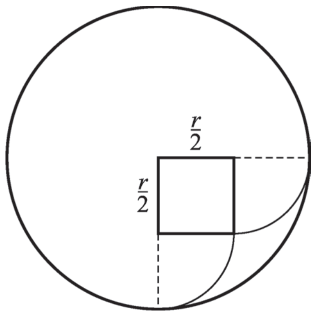
(Igen érdekes eredményre jutunk, ha π-nek nem két tizedesjegy pontosságával, hanem négy vagy több tizedesjegy pontosságával számolunk. $\pi = 3{,}141\,5$-tel számolva a két terület hányadosa már jóval kedvezőbb: 0,499 8, vagyis ez esetben a ház megépíthető.)

1769. Ha a küllő hossza k, akkor a feltételek szerint

$(40 + k)^2\cdot\pi = 9\cdot 40^2\cdot\pi$, ahonnan $k = 80$ cm.

1770. A füves rét területe: $r^2\pi - \left(\frac{r}{2}\right)^2$.

1770.



A kecske által elérhető terület az r sugarú rét $\frac{3}{4}$-d része, valamint 2 negyedkör, melyek sugara $\frac{r}{2}$, vagyis

$$\frac{3}{4}r^2\pi + 2\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{7}{8}r^2\pi.$$

Ezek szerint a kecske lelegelheti a rét

$$\frac{\frac{7}{8}r^2\pi}{r^2\pi - \frac{r^2}{4}} \approx 0{,}95\%\text{-át.}$$

1771. Ha először k db papírt vágtunk ketté ($k \le 100$), akkor $100 + k$ db papírlapunk lesz. Másodszor $2k$ papírt vágtunk ketté, így ez után $100 + 3k$ papírlapunk lesz. Harmadik alkalommal $4k$ db papírt vágtunk ketté, így $100 + 7k$ papírlapunk lesz. Belátható, hogy az n-edik darabolás után $100 + (2^n - 1)$ db papírlapunk lesz.

$100 + (2^n - 1)\cdot k = 2005$, azaz $(2^n - 1)\cdot k = 1905 = 3\cdot 5\cdot 127$.

Mivel 1905 $2^n - 1$ alakú osztói közül csak a 127 jöhet szóba, így $n = 7$ és ekkor $k = 15$. Tehát legelőször 15 db papírlapot vágtunk ketté és az eljárást 7-szer ismételtük meg.

Nevezetes egyenlőtlenségek

1772. Legyen $x + y = 18$. Ekkor $9 = \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, tehát $81 \ge xy$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y = 9$. Ekkor a szorzat értéke: 81

1773. Legyen $x + y = 100$. Ekkor $50 = \frac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$, tehát $2500 \ge xy$. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y = 50$, ekkor a szorzat értéke: 2500.

1774. Legyenek az oldalak: a és b. Mivel $2(a+b) = 150$, $37{,}5 = \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} = t_{\text{téglalap}}$. Tehát a téglalap maximális területe: $1406{,}25\ \text{cm}^2$, ekkor az oldalak: $a = b = 37{,}5$ cm.